Chapitre 0 : Logique

1 Assertions

Définition 1.1. Une assertion est une phrase mathématique qui peut être vraie ou fausse.

1.1 Connecteurs logiques

Définition 1.2. Soit P et Q deux assertions.
On définit :

* La négation non(P) $(\neg P)$ qui est vraie si P est fausse, et réciproquement.
* La conjonction P et Q $(P \wedge Q)$ qui est vraie uniquement si P et Q sont vraies.
* La disjonction P ou Q $(P \vee Q)$ qui est vraie si P est vraie ou si Q est vraie (ou les deux).
* L'implication $P \implies Q$ qui est vraie si P est fausse ou si Q est vraie (ou les deux).
* L'équivalence $P \iff Q$ qui est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité.

On résume souvent ces définitions par des tables de vérité.

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
F	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F
V	F	F	V	F	F
V	V	V	V	V	V

Proposition 1.3. Soit P, Q, R trois assertions.
Alors :

* P et (Q ou R) équivaut à (P et Q) ou (P et R)
* P ou (Q et R) équivaut à (P ou Q) et (P ou R)

(on parle de double distributivité et / ou)

1.2 Négation des connecteurs

Proposition 1.4. Soit P une assertion.
Alors non(non(P)) équivaut à P

Théorème 1.5. Soit P et Q deux assertions. On a :
Lois de De Morgan :

* non(P et Q) équivaut à non(P) ou non(Q)
* non(P ou Q) équivaut à non(P) et non(Q)

non($P \implies Q$) équivaut à P et non(Q).

1.3 Quantificateurs

Définition 1.6. Soit $P(x)$ une assertion dépendant d'un objet $x \in X$
On définit :

* La $\forall$-assertion $\forall x \in X, P(x)$ qui est vraie quand $P(x)$ est vraie quelque soit l'élément x de X
* La $\exists$-assertion $\exists x \in X : P(x)$ qui est vraie quand $P(x)$ est vraie pour au-moins un élément $x \in X$

Théorème 1.7. Soit $P(x)$ une assertion dépendante d'un objet $x \in X$
Alors :

* non $(\forall x \in X, P(x))$ équivaut à $\exists x \in X : \text{non}(P(x))$
* non $(\exists \in X, P(x))$ équivaut à $\forall n \in X : \text{non}(P(x))$

2 Canevas de preuves

2.1 Preuve d'un conjonction P et Q

Principe : Pour démontrer P et Q on démontre successivement P, puis Q

Montrons P et Q
[arg / calc] donc P
[arg / calc] donc Q

2.2 Preuve d'une implication

Principe : Pour montrer $P \implies Q$ on suppose P et on montre Q

Montrons $P \implies Q$
Supposons P
[arg / calc utilisant probablement P] donc Q

2.3 Preuve d'une équivalence

Principe : L'assertion $P \iff Q$ équivaut à $((P \implies Q)$ et $(Q \implies P))$
On dit qu'on procède par double implication.

Montrons $P \iff Q$ par double implication
Sens direct : Supposons P
[arg / calc utilisant probablement P] donc Q
Sens réciproque : Supposons Q
[arg / calc utilisant probablement Q] donc P

2.4 Preuve d'une disjonction

Principe : P ou Q équivaut à $(\text{non}\, P) \implies Q$

Montrons P ou Q, ou plutôt $(\text{non}\, P) \implies Q$
Supposons non P
[arg / cal utilisant probablement non(P)] donc Q

2.5 Preuve d'une $\forall$-assertion

Principe : Pour montrer $\forall x \in X, P(x)$, on "invoque" un $x \in X$ quelconque et on montre $P(x)$

Montrons $\forall x \in X, P(x)$
Soit $x \in X$
[arg / calc] donc $P(x)$

2.6 Preuve d'une $\exists$-assertion

Principe : Pour montrer $\exists x \in X : P(x)$, on exhibe un élément bien choisi $x_0 \in X$ et on note $P(x_0)$

Montrons $\exists x \in X : P(x)$
Candidat : $x_0 =$ [choix intelligent]
[arg / calc] donc $x_0 \in X$
[arg / calc] donc $P(x_0)$

2.7 Utilisation d'un $\forall$-assertion

Pour utiliser $\forall x \in X, P(x)$ on identifie un (ou plusieurs) élément(s) $x_0 \in X$: on sait alors que $P(x_0)$ est vrai.

2.8 Utilisation d'une $\exists$-assertion

Pour utiliser $\exists x \in X : P(x)$ il suffit d'écrire "on peut trouver $x_0 \in X$ tel que $P(x_0)$" : on peut alors parler de x_0 dans la suite.

2.9 Exemples

Montrons que le carré d'un entier pair est pair, càd : $\forall n \in \mathbb{Z}, n$ pair $\implies n^2$ pair.

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons n pair $\implies n^2$ pair.
Supposons n pair, càd $\exists k \in \mathbb{Z} : n = 2k$
On peut donc trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$
Montrons n^2 pair, càd $\exists l \in \mathbb{Z} : n^2 = 2l$
Candidat : $l = 2k^2$
On a bien $l \in \mathbb{Z}$
On a $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2l$, ce qui conclut.

3 Autres modes de raisonnement

3.1 Contraposée

Principe : $P \implies Q$ équivaut à non $Q \implies$ non P

3.2 Raisonnement par l'absurde

Principe : Pour montrer P, on peut supposer non(P) et aboutir à une assertion fausse (une contradiction).

3.3 Disjonction de cas

Principe : On peut montrer P en montrant :
$H \implies P, H_2 \implies P, H_3 \implies P, \dots, H_n \implies P, (H_1$ ou H_2 ou ... ou $H_n)$

3.4 Démonstration par chaîne d'équivalences

Principe : Si $P_1 \iff P_2, P_2 \iff P_3, \dots, P_{n-1} \iff P_n$
donc $P_1 \iff P_n$

3.5 Raisonnement par analyse et synthèse

Pour identifier tous les objets vérifiant une certaine propriété :

* Analyse : On considère un objet possédant cette propriété et on en tire des conséquences : on trouve de nouvelles propriétés.
* Synthèse : Parmi des objets possédant ces nouvelles propriétés, on identifie ceux qui possédaient la propriété initiale.

3.6 Preuve d'un résultat d'unicité

Principe : Pour montrer qu'il existe au plus un objet $x \in X$ tel que $P(x)$, on montre
$\forall x_1, x_2 \in X, (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \implies x_1 = x_2$
On invoque deux objets ayant la propriété et on montre qu'ils sont égaux.

4 La raisonnement par récurrence

Ce mode de raisonnement sert à démontrer des assertions de la forme $\forall n \geq n_0, P(n)$ où :

* $n_0 \in \mathbb{Z}$
* $P(n)$ est une assertion qui dépend de $n \geq n_0$ entier.
* $\forall n \geq n_0$ est une abréviation de $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0 \implies P(n)$

4.1 La récurrence simple

Principe : Pour montrer $\forall n \geq n_0, P(n)$ il suffit de montrer $P(n_0)$ et $\forall n \geq n_0, P(n) \implies P(n+1)$

Notons, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ l'assertion [...]
Montrons $\forall n \geq n_0, P(n)$ par récurrence.
Initialisation : [arg / calc] donc $P(n_0)$
Hérédité : Soit $n \geq n_0$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$
[arg / calc] donc $P(n+1)$, ce qui clôt la récurrence.

4.2 La récurrence double

Principe : Pour montrer $\forall n \geq n_0, P(n)$ il suffit de montrer $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et
$\forall n \geq n_0, (P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$

4.3 La récurrence forte

Principe : Pour montrer $\forall n \geq n_0, P(n)$ il suffit de montrer $P(n_0)$ et
$\forall n \geq n_0, (P(n_0) \text{ et ... et } P(n)) \implies P(n+1)$